

TD MÉTHODES QUANTITATIVES CONTRÔLE N°1

Exercice 1 - Loi de Pareto

Le nombre d'individus d'une population ayant un revenu au moins égal à x est donné par la loi de Pareto

$$N(x) = \frac{10^7}{x^2}$$

Déterminer les quantités suivantes :

- 1) le nombre de personnes ayant un revenu compris entre 50 et 200
- 2) le millième plus haut revenu.

Exercice 2 - Fonctions de coût

Dans une usine, le coût total de production est estimé par la fonction

$$C(q) = q^3 - 12q^2 + 48q,$$

et on suppose que q varie dans l'intervalle $]0; 8[$.

- 1) Calculer l'expression de $Cm(q)$ et $CM(q)$.
- 2) Trouver la quantité q_0 pour laquelle le coût moyen est minimum.
- 3) Trouver la quantité q_1 pour laquelle le coût moyen est égal au coût marginal. Que constatez-vous ?
- 4) Calculer $Cm(4)$. Déterminer alors les constantes a et b telles que $Cm(q) = (q - 4)(aq + b)$
- 5) Étudier le signe de $Cm(q)$ et en déduire le tableau de variation de la fonction C .

Exercice 3 - Placements

Une personne place, pendant un an, une partie de son capital à 7% et l'autre à 3%; elle reçoit 120 euros d'intérêts. Si elle avait échangé les taux des deux placements, les intérêts auraient été supérieurs de 20 euros. On cherche à calculer la somme totale initialement investie.

- 1) Expliquer pourquoi ce problème se ramène à la résolution du système

$$\begin{cases} 7x + 3y = 12000 \\ 3x + 7y = 14000. \end{cases}$$

- 2) Quel est le déterminant du système ? En déduire le nombre de solutions du système.
- 3) Soit les matrices $A = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. Interpréter le système précédent matriciellement.
- 4) Vérifier que la matrice

$$invA = \begin{pmatrix} \frac{7}{40} & \frac{-3}{40} \\ \frac{-3}{40} & \frac{7}{40} \end{pmatrix}$$

est la matrice inverse de A . Résoudre le système, et en déduire la somme initialement investie.