Devoir surveillé n°5
Mercredi 19 Janvier 2005

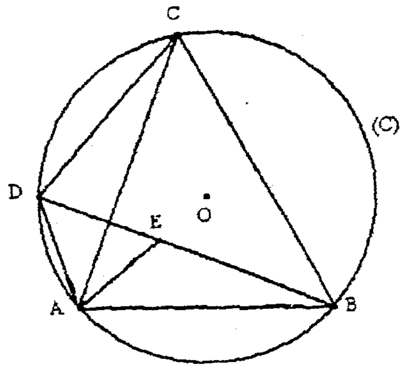
Question de cours : Enoncer les trois cas de similitude entre deux triangles.

Exercice 1

Les segments [AC] et [BD] se coupent perpendiculairement en O et on a OA=8 cm, OB=4 cm, OC =2 cm et OD=1 cm.

1. Démontrer que les triangles OAB et OBC sont semblables, puis que les triangles OBC et OCD sont semblables.
2. Calculer le coefficient de réduction k permettant de passer du triangle OAB au triangle OBC puis le coefficient k' permettant de passer du triangle OBC au triangle OCD.
3. Démontrer que les droites (AB) et (BC) sont perpendiculaires, puis que les droites (AB) et (CD) sont parallèles.

Exercice 2 (La relation de Ptolémée)



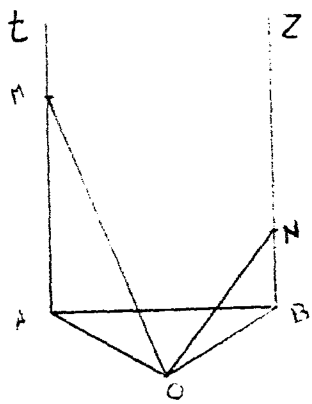
Dans la figure ci-contre, (C) est un cercle de centre O, et ABCD est un quadrilatère convexe inscrit dans le cercle (C).

Le but de l'exercice est de démontrer que
$BD \times AC = CD \times AB + AD \times BC$

E est le point du segment [DB] tel que DAE=CAB.

1. Démontrer que les triangles ADE et ACB sont semblables. En déduire que $DE = CB \times \frac{AD}{AC}$.
2. Démontrer de même, à l'aide des triangles AEB et ADC, que $EB = DC \times \frac{AB}{AC}$.
3. Conclure.

Exercice 3



Sur la figure ci-contre :
AOB est un triangle isocèle en 0 avec OA=OB=1,
[At) et [Bz) sont deux demi-droites perpendiculaires à la droite (AB),
M est un point variable de [At) distinct de A,
N est le point de [Bz) tel que BON=AMO.

1.
   a) Démontrer que les triangles OBN et MAO sont semblables.
   b) En déduire que $BN = \frac{1}{AM}$

2. Le but de cette question est de déterminer s'il existe une position de M telle que l'aire A du trapèze ABNM soit minimale.
   On pose AM=x.
   a) Démontrer que A=$\left(x + \frac{1}{x}\right) \times \frac{AB}{2}$.
   b) Soit f la fonction numérique définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = x + \frac{1}{x}$.
   Justifier que pour tout réel x strictement positif, $f(x) - f(1) = \frac{(x-1)^2}{x}$. En déduire que la fonction f présente un minimum en x=1.
   c) Conclure.